Schrödinger's cut II

Additifs et mesure quantique (brouillon)

Jean-Yves Girard

29 septembre 2022

1 Syntaxe transcendantale : rappels

1.1 Étoiles

La Géométrie de l'interaction, alias *Syntaxe transcendantale* (ST), repose sur la notion d'*étoile* $[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$ e.g., $[\![f(x,y), g(x,y)]\!]$ où les t_i sont des termes non unifiables avec *exactement* les mêmes variables. Les termes clos engendrent un espace de Hilbert ℓ^2 sur lequel les termes agissent par substitution, e.g., $a, b \rightsquigarrow t[a,b]$ et induisent ainsi des isométries de $\ell^2 \otimes \ldots \otimes \ell^2$ dans ℓ^2. Muni de coefficients idoines, $[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$ peut alors être vu comme un projecteur (sous-espace clos) de ℓ^2, typiquement, dans le cas $n = 2$, de loin le plus important :

$$[\![t, u]\!] = 1/2(tt^* - tu^* - ut^* + uu^*)$$

Une démonstration devient une *constellation*, i.e., une somme finie d'étoiles deux à deux disjointes. La *coupure* sur le support (sous-espace clos) $\mathcal{C}$ entre $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ s'exprime par la formule :

$$\mathfrak{D} \rightleftharpoons_{\mathcal{C}} \mathfrak{E} := (\mathfrak{D} + \mathfrak{E}) \cap \mathcal{C}^{\perp} \qquad (1)$$

ce qui est la forme ultime de l'exécution de la géométrie de l'interaction.

Exemple : $\mathcal{C}$ est l'étoile $[\![f(x)]\!]$, $\mathfrak{D} = [\![f(t), f(t')]\!] + [\![f(u), f(u')]\!]$ et $\mathfrak{E} = [\![f(x), g(x)]\!]$. Le sous-espace associé à $\mathfrak{E}$ est formé des $g(v) - f(v)$; alors que tous les éléments de l'espace $\mathfrak{D}$ sont des combinaisons d'éléments $f(v)$

auxquels on peut ajouter un $g(v) - f(v) \in \mathfrak{E}$ pour obtenir $g(v) \in \mathcal{C}^{\perp}$. En résumé, $\mathfrak{D} \rightleftharpoons_{\mathcal{C}} \mathfrak{E} = \llbracket\, g(t), g(t')\,\rrbracket + \llbracket\, g(u), g(u')\,\rrbracket$.

Issu de l'étude des multiplicatifs, ce paradigme fonctionne très bien dans le cadre exponentiel, mais pas dans le cadre additif où la ST ne s'étend pas de façon convaincante.

1.2 Égalité

Le connecteur logique le plus basique, l'*égalité*, a été traité comme un monstre axiomatique depuis toujours. En particulier à travers l'égalité de Leibniz, un pléonasme. Comment toute propriété de a peut-elle être propriété de b, vu que je peux les différencier par leur position dans le discours ? Réponse de la langue de bois : je n'ai pas droit à ce type de propriété qui ne s'adresse pas à la dénotation : il faut se restreindre aux propriétés compatibles avec cette dernière, *in fine* avec l'égalité. Définition vide, donc.

Ceci dit, l'expression de « Leibniz » en réseaux fait apparaître des liens entre des $\sim X(a)$ et des $X(b)$ dans lesquels la variable X ne sert à rien. On peut l'effacer et se contenter de liens entre des $\sim a$ et et des b.

Les individus du calcul des prédicats qui tombaient jusque là du Ciel deviennent alors des propositions, et $a = b$ l'équivalence $(a \multimap b) \& (b \multimap a)$. Bien entendu, la linéarité est de mise, puisqu'une gestion classique restreindrait l'univers à deux individus.

1.3 La vérité déréaliste

Les constantes multiplicatives ont toujours été un cauchemar : pas de réseau pour elles. Or il existe une notion proche, celle du réseau à un point, naturellement auto-dual et prouvable ; ce qui pose le problème de la *vérité*.

Cette notion ne s'applique pas aux formules mais à leurs preuves ; autrement dit, tout le monde est prouvable, même l'absurdité $\mathbf{0}$, mais avec des preuves invisibles : plus aucun espoir d'une quelconque table de vérité dans ce cadre. Inspiré de l'invariant d'Euler-Poincaré des réseaux, on associe un poids à chaque étoile $\llbracket\, t_1, \ldots, t_m, u_1, \ldots, u_n\,\rrbracket$: $2 - m$ si $n = 0$, $-m$ sinon[1]. Une démonstration est visible (valable) quand son poids total est positif.

Le réseau à un point trouve deux formes, フ (fu) et ヲ (wo), la première objective, la seconde subjective. Toutes deux sont prouvables, mais pas équi-

1. Il faut distinguer deux types de rayons : les t_i sont objectifs, les u_j subjectifs.

valentes. Parmi leurs combinaisons, l'absurdité :

$$\mathbf{0} := !(\text{フ} \parr \text{ヲ}) \otimes \text{ヲ}$$

et donc la constante additive $\top$ s'exprime comme $(\text{フ} \parr \text{ヲ}) \Rightarrow \text{ヲ}$.

1.4 Arithmétique

L'arithmétique serait un système logique – du second ordre, cf. l'incomplétude – s'il n'y avait le petit noyau des axiomes 3 et 4 de Peano : $Sx \neq 0, Sx = Sy \multimap x = y$. Vu que les individus ont disparu, il est possible de définir les entiers par $\overline{n} := \text{フ} \otimes \ldots \otimes \text{フ}$ $(n \geq 1)$, $\overline{n} := \text{フ} \parr \ldots \parr \text{フ}$ $(n \leq 1)$. Et les deux axiomes problématiques deviennent alors des théorèmes !

Miracle de la vérité déréaliste : $((A \otimes \text{フ}) \multimap (B \otimes \text{フ})) \multimap (A \multimap B)$ contredit violemment toute la tradition logique qui n'admet aucun exemple non trivial d'implication $(\Phi(A) \multimap \Phi(B)) \multimap (A \multimap B)$.

2 Les additifs

Je les ai rencontrés une fois de plus en essayant de comprendre le quantique : il y a une similitude entre la version d'usage (synthétique *a priori*, BHK) de la disjonction intuitionniste – ou linéaire, la nuance n'est que technique – et la mesure quantique. Une fois explicitée, une démonstration de $A \oplus B$ est formée d'une démonstration de A ou de B, plus un *bit* nord/sud correspondant au choix entre ces deux « tranches ». La résilience additive face à la logique est peut-être de la même nature que la complète inadéquation de l'approche logique face à la découverte physique la plus dérangeante de tous les temps.

2.1 Les boîtes

Les boîtes additives sont déjà présentes en déduction naturelle avec les règles de la disjonction

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{A \vee B}\,(g \vee I) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array}}{A \vee B}\,(d \vee I) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,(\vee E)$$

Les règles d'introduction $(g \vee I)$ et $(d \vee I)$ sont *locales*, asynchrones : elles transforment la prémisse A (ou B) en $A \vee B$, l'élimination $(\vee E)$ est *globale* : les deux prémisses mineures ne sont pas des formules mais des démonstrations d'une tierce formule C, sorte de synchronisation un peu artificielle qui mène au pénible développement technique appelé *réduction commutative*, laquelle *retarde* la synchronisation, par exemple

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ C \Rightarrow D\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C \Rightarrow D\end{matrix}}{C \Rightarrow D}}{D} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ C \Rightarrow D\end{matrix}}{D} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C \Rightarrow D\end{matrix}}{D}}{D}$$

Cette technique — qui s'étend difficilement au cas linéaire — était pensable au temps de Prawitz où la normalisation tombait du Ciel. Les *réseaux de démonstration* où la normalisation se réduit à des branchements de fils s'en accommodent mal, puisque la réduction commutative ne consiste pas à effectuer des branchements mais à redisposer des prises.

2.2 Les booléens, où ?

Le choix booléen, que j'ai appelé nord/sud pour garder en tête qu'il pourrait s'agit du spin d'un électron, s'intègre mal à la ST. Comment éviter les échafaudages, les pièces montées à la Tarski et trouver leur place dans notre univers[2] ? Je propose de remplacer le ℓ^2 de la ST par l'espace de Fock antisymétrique

$$\Gamma_a(\ell^2) := \mathbb{C} + \ell^2 + \ldots + \ell^2 \wedge \ldots \wedge \ell^2 + \ldots$$

avec pour produit scalaire $< x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > := \det(< x_i, y_j >)$.

Étant donné un élément de $z \in \ell^2$ typiquement un terme clos t, on peut former le *créateur* $C(z)$, opérateur de $\Gamma_a(\ell^2)$ dans lui-même :

$$C(z)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) := z \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$$

et son adjoint, l'*annihilateur* $A(z)$:

$$A(z)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) := \sum (-1)^{i+1} < x_i, z > x_1 \wedge \ldots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \ldots \wedge x_n$$

2. Inspiré depuis le tout début par les algèbres d'opérateurs, cadre mathématique du quantique. Ce qui demande plus qu'une (modeste) expertise du sujet : ne pas rater la cible.

qui satisfont les relations « CAR » (canonical anticommutation relations) :

$$\begin{array}{rcl} C(z)A(z') + A(z')C(z)) & = & < z, z' > I \\ C(z)C(z') + C(z')C(z) & = & 0 \end{array}$$

Si t est un terme clos on note $\hat{t} := C(t)A(t)$ et $\check{t} := A(t)C(t)$. Il s'agit de deux projecteurs supplémentaires $\hat{t} + \check{t} = I, \hat{t}\check{t} = 0$.

2.3 Étoiles, revues

Une étoile prend désormais la forme $[\![t_1, \ldots, t_m]\!]\hat{u}_1 \ldots \hat{u}_n \check{v}_1 \ldots \check{v}_p$ avec :

1. $m + n + p \neq 0$.
2. Les t_i ont les mêmes variables.
3. Les u_j et v_k sont clos.
4. Les t_i, u_j, v_k sont deux à deux disjoints.

Il s'agit d'un produit de projecteurs commmutant deux à deux. $[\![t_1, \ldots, t_m]\!]$ est un abus de langage pour son extension à $\Gamma_a(\ell^2)$:

$$[\![t_1, \ldots, t_m]\!] + \ldots + [\![t_1, \ldots, t_m]\!] \wedge [\![t_1, \ldots, t_m]\!]^\perp \wedge \ldots \wedge [\![t_1, \ldots, t_m]\!]^\perp + \ldots$$

2.4 ST additive

Cette notion permet de superposer des réseaux $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$: ce qui se fait en formant $\mathfrak{D}\hat{u} + \mathfrak{E}\check{u}$. S'il s'agit d'une conjonction additive $A \,\&\, B$, on peut utiliser comme u l'adresse où est écrit le & en question.

Mais *quid* du dual $\oplus$? Si $\mathfrak{F}$ est une démonstration de $\vdash A, \Gamma$, il est naturel de la transformer en $\mathfrak{F}\hat{u}$, où u est l'adresse du connecteur $\oplus$. Mais ça ne suffit pas, rappelons-nous le *bit* de BHK. On lui ajoute $\check{u}$, gomme à effacer les $\check{u}$ et à transformer les $[\![t_1, \ldots, t_n]\!]\hat{u}$ en $[\![t_1, \ldots, t_n]\!](\hat{u} + \check{u}) = [\![t_1, \ldots, t_n]\!]$! Autrement dit à effacer la « tranche » $\mathfrak{E}\check{u}$ et le $\hat{u}$ de $\mathfrak{D}\hat{u}$.

2.5 Vers le quantique

Si $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ (latitude) et $\beta \in \mathbb{R}$ (longitude *modulo* 2π) soit

$$t_{\alpha,\beta} := 1/2((1 + \sin\alpha) \cdot \hat{t} + \cos\alpha \cdot e^{i\beta} \cdot C(t) + \cos\alpha \cdot e^{-i\beta} \cdot A(t) + (1 - \sin\alpha) \cdot \check{t})$$

d'antipode

$$t_{-\alpha,\beta+\pi} := 1/2((1-\sin\alpha)\cdot\hat{t}+-\cos\alpha\cdot e^{i\beta}\cdot C(t)-\cos\alpha\cdot e^{-i\beta}A(t)+(1+\sin\alpha)\cdot\check{t})$$

Le quantique apparaît naturellement quand nous considérons d'autres positions que le nord/sud $\hat{t}/\check{t}$. Rien ne s'y oppose sinon une question de cohérence. Je vais me contenter d'une coupure additive, après tout c'est mon point de départ.

Un « & » suppose un couple antipodique $t_{\alpha,\beta}/t_{-\alpha,\beta+\pi}$. Modulo un changement de repère, je peux toujours le voir comme un nord/sud $t_{\pi/2,*}/t_{-\pi/2,*}$. Par contre, le « $\oplus$ » qui lui fait face peut prendre n'importe quelle valeur $t_{\alpha,\beta}$; on le reconnaît par sa « gomme » $t_{-\alpha,\beta+\pi}$, encore faut-il la mesurer. C'est ce que se propose de faire le « & » qui lui fait face par coupure. Autrement dit, l'électron est un « $\oplus$ », l'appareil de mesure un « & ».

La solution constitue la rupture (espérée !) avec le paradigme (1) de la GdI. Pour normaliser, il faut renormaliser : $t_{\alpha,\beta}$ et $t_{-\alpha,\beta+\pi}$ deviennent $\hat{t}$ et $\check{t}$ (probabilité $(1+\sin\alpha)/2$), sinon $\check{t}$ et $\hat{t}$ (probabilité $(1-\sin\alpha)/2$).

C'est quand même plus excitant que la réduction commutative. Mais *quid* de l'indiscernabilité quantique, fermions et bosons ?

Jean-Yves Girard
Directeur de Recherches émérite
jeanygirard@gmail.com

vitam impendere logicæ